MA1 1. a 2. cvičení – příklady k opakování středoškolské matematiky
(pro „naši" matematiku zvláště potřebných partií, trošku „obtížnější" příklady mají *)

I. Řešení rovnic a nerovnic (v R) :

1. kvadratických:

a) $(x^2+2)(x-1)=0$
b) $(x^2+2)(x-1)<0$
c) $(x+2)(x-1)=0$
d) $3x^2+x=0$
e) $3x^2+x\geq 0$
f) $x^2\leq 4$
g) $x^2+3x+1\geq -1$
h) $x^2+4x+4<-1$

2. s neznámou ve jmenovateli:

a) $\frac{1}{x}\geq 2$
b) $1<\frac{3x-1}{x-2}$
c) $\frac{x^2-1}{x+3}\leq 0$
d) $\frac{x-1}{x+1}>\frac{x}{x-2}$

3. s odmocninami:

a) $\sqrt{x+2}<1$
b)* $\sqrt{x-2}+x>4$
c)* $\sqrt{x^2+2x-3}\geq\sqrt{x^2+3x-4}$
d) $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}>2$

II. Absolutní hodnota (v R).

1*. Vlastnosti absolutní hodnoty reálného čísla:
Pokuste se ukázat, a hlavně si připomeňte, že pro libovolná $a,b,c\in R$ platí:

$$|a|=\max(a,-a);$$
$$a\leq c\ \wedge\ -a\leq c\ \Rightarrow |a|\leq c\ ;$$
$$|a+b|\leq |a|+|b|\ ;$$
$$|a-b|\leq |a|+|b|\ ;$$
$$\big||a|-|b|\big|\leq |a-b|\ ;$$
$$|a-b|\leq |a-c|+|c-b|\ ;$$
$$|a\cdot b|\leq \frac{a^2+b^2}{2}\ .$$

2*. V množině reálných čísel R definujeme vzdálenost $d(a,b)$ dvou bodů a,b:

$$d(a,b)=|a-b|=|b-a|\ ,\ a,b\in R\ .$$

Ukažte, že pro libovolná $a,b,c\in R$ platí:
(1) $d(a,b)\geq 0,\ d(a,b)=0 \Leftrightarrow a=b$;
(2) $d(a,b)=d(b,a)$;
(3) $d(a,b)\leq d(a,c)+d(c,b)$.

3. Rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou:

a) $\big||x-2|-3\big|=5$
b) $|x+2|+|x-3|=7$
c) $|x-2|\leq 1$
d) $|x+3|>4$
e) $|x-1|<3\ \wedge\ |x+5|\geq 4$ (soustava nerovnic)
f) $|x-1|<|x+5|$
g) $|x^2+2x-3|\geq|x^2+3x-4|$
h) $\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\leq 1$

III. Funkce .

1. Najděte definiční obory funkcí:

a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$; $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x+2}}$

b) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$; $f(x)=\ln(x^2-1)$; $f(x)=\ln(\ln x)$; $f(x)=\ln(\ln x-1)$;
$f(x)=\ln(\ln(x-1))$;

c) $f(x)=\sqrt{\cos x}$; $f(x)=\sqrt{1-(\sin x)^2}$; $f(x)=\sqrt{(\sin x)^2-1}$; $f(x)=\ln(\sin x)$;
$f(x)=\ln(\sin x-\frac{1}{2})$.

2. Načrtněte grafy funkcí (bez užití diferenciálního počtu, jen opakování „taháku“ grafů základních funkcí) :

a) $f(x)=|x|$ a pak zkuste také grafy funkcí $|x-1|$; $|x|-1$; $|-x|$;

b) $f(x)=x^2$ a pak zkuste také grafy funkcí $-x^2$; x^2+1 ; $(x+1)^2$; x^2+2x+2 ;
x^2+3x+2; $|x^2+3x+2|$;

a navíc ještě do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí x, x^2, x^3, x^4;

c) $f(x)=\sqrt{x}$ a pak zkuste také grafy funkcí $\sqrt{-x}$; $\sqrt{|x|}$; $\sqrt{x^2}$; $\sqrt{x-1}$; $\sqrt{x}-1$;
a pak ještě do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí x^2 a $\sqrt{x}$; x^3 a $\sqrt[3]{x}$;
a také ještě do jednoho obrázku grafy funkcí x, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[4]{x}$;

d) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ a pak zkuste také grafy funkcí $-\dfrac{1}{x}$; $\dfrac{1}{|x|}$; $\dfrac{1}{x+1}$; $\dfrac{1}{x}+1$; $\dfrac{x-2}{x+1}$;

e) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ a pak zkuste také grafy funkcí $\dfrac{1}{(x+1)^2}$; $\dfrac{1}{x^2}+1$; $\dfrac{1}{x^2+1}$; $\dfrac{1}{x^2-1}$;

f) $f(x)=e^x$ $(=\exp x)$ a pak zkuste také grafy funkcí $\exp(-x)$; $\exp(x-2)$; $\exp|x|$; $\exp(-|x|)$;
$*\exp(x^2)$; $*\exp(-x^2)$; $**$ $\exp(\frac{1}{x})$;

g) $f(x)=\ln x$ a pak zkuste také grafy funkcí $\ln(-x)$; $\ln|x|$; $|\ln x|$; $|\ln|x||$; $\ln(x+1)$;
$\ln\dfrac{1}{x}$; $\ln\dfrac{1}{|x|}$; $\ln(x^2)$; $\ln(-x^2)$; $\ln\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$;

($\ln x$ zde značí přirozený logaritmus čísla x)

h) $f(x)=\sin x$ a $f(x)=\cos x$ a zkuste také grafy funkcí $\sin(\frac{x}{2})$; $\cos(2x)$; $\cos(x+\pi)$; $|\sin x|$; $\sin|x|$;
$|\cos x|$; $\cos|x|$; $\sqrt{1-(\sin x)^2}$

a (**) pokuste se odhadnout a načrtnout grafy funkcí $\sin(x^2)$; $\sin(\frac{1}{x})$; $\dfrac{1}{\sin x}$; $\dfrac{1}{1+\sin x}$; $\dfrac{1}{2+\sin x}$.

3. <u>Vlastnosti funkce</u>:

a) Zopakujte si definice pojmů: (i) funkce lichá, sudá, periodická;
(ii) funkce rostoucí, klesající, neklesající, nerostoucí na množině $M \subseteq R$;
(iii) funkce prostá na $M \subseteq R$;
(iv) funkce inverzní k funkci f na $M \subseteq R$.

b)* Ukažte (bez užití derivace), že funkce $f(x) = x^2$ je rostoucí na intervalu $[0,+\infty)$ a klesající na intervalu $(-\infty,0]$.

c) Najděte maximální intervaly, na kterých jsou ryze monotónní funkce:

$f(x) = x^2 + 2x + 2$; $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$; $h(x) = \exp(-x^2)$;

* $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (sinus hyperbolický) ; * $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (kosinus hyperboliclý).

A pokuste se to i dokázat za předpokladu, že „víme", že funkce e^x je rostoucí funkce v R.

A dva „problémky" pro zájemce:

d*) Ukažte, že je-li funkce f lichá a $0 \in Df$, pak je $f(0) = 0$.

e*) Promyslete, zda lze z monotonie dvou (i více) funkcí odvodit monotonii funkce z nich složené (pokud je složená funkce definována). Pokuste se výsledek co nejpřesněji formulovat a třeba i dokázat.

4. <u>Inverzní funkce</u>:

a) Promyslete (a třeba se pokuste i dokázat):
Je-li funkce f rostoucí (resp. klesající) na intervalu (a,b), pak je funkce f na intervalu (a,b) prostá, a tedy existuje k funkci f na intervalu (a,b) funkce inverzní.

b) Najděte inverzní funkci k funkci

(i) $f(x) = x^2$ na intervalu $(-\infty,0]$;

(ii) $f(x) = x^2 + 2x + 2$ na maximálních možných intervalech;

(iii) $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$ na maximálních možných intervalech;

(iv)* $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ a $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ na maximálních možných intervalech.

IV. A něco z výrokového a množinového počtu:
(zkuste si aspoň přečíst a porozumět zadání problémků, a pokud něco dokážete, napište a pošlete mi řešení, a s Vaším svolením to dám i pro ostatní spolužáky na „dub“:

1. Vysvětlete a pak negujte následující výroky:
   a) $\forall x \in (a,b): \ |f(x)| \leq 1$;
   b) $\exists c > 0 \ \forall x \in (a,b): \ |f(x)| \leq c$;
   c) $\forall c > 0 \ \forall x \in (a,b): \ |f(x)| \leq c$

2. Rozhodněte o pravdivosti výroku :
   a) $\forall x \in R: \ \cos x = \sqrt{1-(\sin x)^2}$;
   b**) $n \in N$, n^2 liché $\Rightarrow$ n liché .

3.* Ukažte, že následující výroky jsou ekvivalentní (a zapamatujte si):

   (i) $V \Rightarrow W$; (ii) $\neg W \Rightarrow \neg V$; (iii) $\neg V \vee W$; (iv) $\neg(V \wedge \neg W)$.

   A promyslete ekvivalenci výroků (i) – (iv) pro $V: x \in A$ a $W: x \in B$, kde $A \subseteq M$, $B \subseteq M$ (A, B, M jsou množiny) .

4. Buď $A, B \subseteq R$, kde $A = \{a \in R; |a-1| < 2\}$ a $B = \{b \in R; |b+2| \geq 2\}$. Najděte množiny $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$; $A \times B$.

5.* Ukažte, že platí (A, B, C jsou množiny):
   a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
   b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
   c) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
   d) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
   e) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.